

Efecto de la longitud de la ventana en el análisis multifractal basado en onditas líderes

R. F. Leonarduzzi, G. Schlotthauer y M. E. Torres^(*)

Lab. de Señales y Dinámicas no Lineales
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Entre Ríos
CONICET

(*) metorres@santafe-conicet.gov.ar

Abstract— El análisis multifractal es una herramienta apropiada para el análisis de señales que exhiben un comportamiento errático e irregular, presentes en una gran variedad de campos. Provee información sobre sus propiedades de escalamiento y la distribución de sus singularidades. El uso de ventanas temporales deslizantes puede permitir el estudio de la evolución temporal de estos atributos. Sin embargo, en tal situación, la selección adecuada de la longitud de la ventana es un problema fundamental. Este artículo arroja luz sobre las consideraciones prácticas que hay que tener al respecto. Los efectos de la longitud de la ventana en parámetros significativos derivados del análisis multifractal son ilustrados mediante experimentos numéricos, usando datos tanto reales como simulados.

Keywords— Análisis multifractal, onditas líderes, variabilidad de la frecuencia cardíaca, isquemia de miocardio

1. INTRODUCCIÓN

En una gran variedad de campos, muchas señales muestran un comportamiento errático e irregular. Ejemplos de esto lo constituyen algunas señales biomédicas, las series financieras y el tráfico en redes informáticas. Este comportamiento complejo contiene información importante relacionada con los sistemas físicos involucrados en su generación y, por lo tanto, su cuantificación es crítica para lograr su mejor comprensión.

El análisis multifractal (*multifractal analysis*, MFA) es una herramienta adecuada para este tipo de mediciones. Mediante su aplicación se puede cuantificar la irregularidad de una señal mediante parámetros que indican la fuerza de sus singularidades, así como la forma en la que están distribuidas. Existen distintas versiones del MFA, que se diferencian por la medida multiresolución en que se basan. A modo ejemplo, existen formalismos basados en incrementos de la señal [13] y en los módulos máximos de la transformada ondita continua [3], entre otros. Recientemente se propuso

un nuevo formalismo, basado en onditas líderes, que muestra un mejor desempeño que los anteriores [8, 1].

El MFA brinda información relacionada con las singularidades de la señal, pero sólo en forma global. Sin embargo, en ocasiones es necesario disponer de información local. Por ejemplo, si un hipotético estado patológico se manifestara a través de un cambio en la regularidad de una señal biomédica, sería de interés detectar *cuándo* ocurre dicho cambio. Por lo tanto, el MFA debe ser adaptado para incorporar información temporal. Una forma de lograr este objetivo es aplicar el MFA en ventanas temporales deslizantes. Este método fue empleado con éxito en [10] para el análisis de señales de variabilidad de la frecuencia cardíaca.

Lógicamente, un paso crucial en este método es la selección de la longitud de la ventana. Idealmente, ésta debería ser lo más pequeña posible de forma tal de obtener una buena resolución temporal. Sin embargo, es necesario considerar la forma en que la longitud de la ventana afecta a los resultados obtenidos mediante el MFA.

En este trabajo se aborda este problema mediante experimentos numéricos llevados a cabo tanto sobre señales artificiales con propiedades teóricas conocidas como sobre datos biomédicos reales. Estos experimentos arrojan luz sobre las consideraciones que deben ser tenidas en cuenta al seleccionar la longitud de la ventana.

Este artículo está organizado en la siguiente forma. En la Sec. 2 se brinda un resumen corto de los conceptos principales relacionados con el análisis multifractal basado en onditas líderes, así como una descripción de las señales, tanto artificiales como reales, que fueron usadas. En la Sec. 3 se describen los experimentos que fueron realizados y los resultados que se obtuvieron. Las conclusiones son dadas en la Sec. 4.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

En esta sección se hace una revisión breve de las herramientas utilizadas en el trabajo. En primer lugar se presentan las definiciones de exponente de Hölder y de espectro de singularidades. A continuación se definen las onditas líderes (*wavelet leaders*, WL) y el formalis-

mo multifractal basado en ellas, siguiendo a [9].

2.1. Exponente de Hölder y espectro de singularidades

Dado un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ y una constante real $\alpha \geq 0$, se dice que una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es $C^\alpha(t_0)$ si existen una constante $K > 0$ y un polinomio P_{t_0} de grado menor que α tal que $|f(t) - P_{t_0}(t)| \leq K|t - t_0|^\alpha$. El exponente de Hölder $h_f(t_0)$ de f en t_0 se define como $h_f(t_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(t_0)\}$ [1]. Éste mide la regularidad local de f en t_0 . Valores pequeños (cerca de 0) de $h_f(t_0)$ indican la presencia de singularidades fuertes, mientras que valores grandes indican singularidades más suaves.

Cuando se analiza una señal que es singular en casi todo punto es útil conocer la distribución de las singularidades con un exponente de Hölder dado. El espectro de singularidades (o espectro multifractal) mide la cantidad de singularidades con un determinado valor de $h_f(t_0)$. Formalmente, se define como la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos en los cuales el exponente de Hölder vale h , es decir, $D(h) = \dim_{\text{H}}\{t \in \mathbb{R} : h_f(t) = h\}$ [1].

2.2. Formalismo multifractal

La determinación de $D(h)$ es importante para analizar las propiedades de una señal. Sin embargo, esto no puede ser realizado a partir de la definición de h_f debido a las limitaciones numéricas impuestas por la resolución finita y el muestreo de las señales [9]. De hecho, después de la discretización, cada muestra de una señal multifractal corresponde a un intervalo en que puede haber tenido un número infinito de singularidades con regularidad diferente [11]. Para poder lidiar con esta situación, en [13] se propuso un *formalismo multifractal* (*multifractal formalism*, MFF) que permite estimar $D(h)$ a partir de cantidades globales fácilmente computables, basándose en la auto-similaridad de los multifractales. Estas cantidades son conocidas como *funciones de estructura*.

El MFF original [13] está basado en los incrementos de la señal. Posteriormente se propusieron variantes basadas en la transformada ondita discreta (*discrete wavelet transform*, DWT) [2], en los módulos máximos de la transformada ondita continua (*wavelet transform modulus maxima*, WTMM) [12, 3] y, más recientemente, en los coeficientes *onditas líderes* [8, 1]. Este último método tiene varias ventajas. En primer lugar, su estabilidad numérica le permite caracterizar el espectro de singularidades completo de una señal (al igual que el basado en WTMM). Por otro lado, al estar basado en la DWT tiene una implementación computacional eficiente en términos de bancos de filtros. Finalmente, está dotado de una base teórica fuerte.

2.3. Onditas líderes

Sea ψ_0 una ondita madre con soporte compacto y una cantidad $N \geq 1$ de momentos nulos. Sea también

$\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j}\psi_0(2^{-j}t - k), j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ formada por las versiones de ψ_0 dilatadas por factores 2^j y trasladadas a las posiciones $2^j k$. Los coeficientes DWT de f se obtienen a partir de los productos internos: $d_f(j, k) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi_{j,k}(t)dt$.

En [8] se introdujo una notación especial para los intervalos diádicos. Sea $\lambda \equiv \lambda_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j]$ tal que $d_\lambda = d_f(j, k)$. La unión del intervalo diádico λ con sus dos intervalos adyacentes se denota como 3λ , es decir, $3\lambda \equiv 3\lambda_{j,k} = \lambda_{j,k-1} \cup \lambda_{j,k} \cup \lambda_{j,k+1}$.

Entonces, las WL se definen como [8]:

$$L_f(j, k) \equiv L_\lambda = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} \{|d_{\lambda'}|\}. \quad (1)$$

En otras palabras, para obtener la WL correspondiente a un tiempo y una escala determinados se debe buscar el mayor coeficiente ondita en una vecindad temporal estrecha del punto en cuestión, y para todas las escalas más finas.

2.4. Formalismo multifractal basado en onditas líderes

En primer lugar, las funciones de estructura $S(q, 2^j)$ se estiman mediante los promedios temporales de las potencias de orden q de los "líderes" $L_f(j, k)$:

$$S(q, 2^j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |L_f(j, k)|^q, \quad (2)$$

donde n_j indica la cantidad de coeficientes $L_f(j, k)$ en la escala 2^j . Si la señal posee alguna forma de invariancia a la escala, las funciones de estructura decaen con las escalas según leyes de potencias. Los exponentes de dichas leyes son conocidos como *exponentes de escalamiento* $\zeta(q)$:

$$\zeta(q) = \liminf_{j \rightarrow 0} \left(\frac{\log_2(S(q, 2^j))}{j} \right). \quad (3)$$

En la práctica, los valores de $\zeta(q)$ se obtienen como las pendientes de las regresiones lineales de $\log_2(S(q, 2^j))$ vs. $\log_2(2^j) = j$.

Finalmente, $D(h)$ puede obtenerse a partir de $\zeta(q)$ mediante una transformación de Legendre:

$$D(h) = \inf_q (1 + qh - \zeta(q)). \quad (4)$$

Con el objetivo de permitir una manipulación más conveniente, puede usarse una expansión en cumulantes de los $\zeta(q)$ [15]:

$$\zeta(q) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{q^p}{p!}, \quad (5)$$

en donde los coeficientes c_p son los *cumulantes logarítmicos* de orden $p \geq 1$ de $\ln L_f(j, \cdot)$. Esta expansión es útil porque permite reemplazar el conocimiento de la función ζ por el conocimiento de unos pocos coeficientes. De hecho, los primeros tres coeficientes

$\{c_p\}_{p=1,2,3}$ concentran la mayor parte de la información multifractal que se puede obtener a partir de datos empíricos [14]. Estos coeficientes pueden ser utilizados fácilmente como *índices multifractales* para tareas de detección y clasificación.

2.5. Señales y bases de datos

En los experimentos numéricos del presente artículo se utilizaron tanto señales artificiales con propiedades teóricas conocidas como señales biomédicas reales.

2.5.1. Movimiento fraccionario Browniano

El movimiento fraccionario Browniano (*fractional Brownian motion*, fBm) es un proceso estadísticamente autosimilar y con incrementos estacionarios. Las realizaciones de fBm son singulares en casi todo punto y todas las singularidades tienen el mismo exponente de Hölder $h_f \equiv H$, en donde H es el parámetro o exponente de Hurst. En consecuencia, su espectro de singularidades se reduce a un sólo punto: $D(h) = 1$ si $h = H$. Las señales con estas características son conocidas como *monofractales*.

2.5.2. Cascadas de Poisson compuestas

Las cascadas de Poisson compuestas (*compound Poisson cascades*, CPC), introducidas en [4], son cascadas multiplicativas con propiedades multifractales y de escalamiento conocidas. Las CPCs se construyen mediante la ubicación de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (llamadas *multiplicadores*) de forma tal de lograr interdependencias entre las escalas del proceso resultante. Las propiedades del proceso dependen de la distribución de la que se extraen los multiplicadores. De esta forma se obtiene un proceso estacionario conocido como ruido de cascada de Poisson (*Poisson cascading noise*). A partir de éste, mediante un proceso de *warping* con fBm, se puede obtener el movimiento Browniano de cascada de Poisson (*Poisson cascading Brownian motion*, PCBM) [6].

2.5.3. Variabilidad de la frecuencia cardíaca

La frecuencia cardíaca muestra fluctuaciones complejas e irregulares incluso en condiciones de reposo que son conocidas como variabilidad de la frecuencia cardíaca (*heart rate variability*, HRV). Se sabe que la HRV brinda información sobre el estado de salud del sistema cardiovascular [7]. De hecho, la HRV refleja la modulación del sistema nervioso autónomo sobre el corazón. Por lo tanto, su estudio lleva a un mejor diagnóstico de muchas patologías importantes que están relacionadas con alteraciones de dicho sistema y, por lo tanto, a un mejor tratamiento [5].

En particular, la HRV es útil en el diagnóstico de la isquemia de miocardio. En [10] usamos el MFF basado en WL para caracterizar y detectar la isquemia de miocardio a partir de esta señal. En este trabajo analizamos la influencia de la longitud de la ventana sobre los resultados obtenidos en [10].

Las señales de HRV fueron obtenidas a partir de la base de datos ST-T Europea (ESDB), que contiene registros de electrocardiograma de pacientes que sufren de isquemia de miocardio. Además, cada registro está acompañado de un archivo de anotaciones con información obtenida por expertos. Las señales de HRV (series de intervalos RR) se obtuvieron a partir de los archivos de anotaciones de la ESDB, considerando las diferencias entre dos latidos consecutivos. A continuación, todos los intervalos que contuviesen a un latido anormal (ectópico, ruidoso, etc.) se eliminaron. Este procedimiento previene la inclusión de artefactos, haciendo innecesaria una etapa posterior de filtrado. Debido a que se requiere una señal muestreada uniformemente para el cálculo de la DWT, las series RR se interpolaron mediante splines cúbicos a una frecuencia de muestreo de 4 Hz. Se utilizó el mismo conjunto de pacientes que en [10].

3. RESULTADOS

En primer lugar se examinó la influencia de la longitud de la ventana sobre las señales artificiales. Para ello, se analizaron 100 realizaciones de fBm y PCBM de longitud $N = 2^8, 2^9, \dots, 2^{18}$. El fBm fue generado con parámetros de Hurst $H \in \{0,1, 0,3, 0,5, 0,7, 0,9\}$. El PCBM fue generado usando fBm con parámetro de Hurst $H = 0,5$ para el warping, y una distribución log-normal para los multiplicadores con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 \in \{0,04, 0,07, 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,7\}$.

La Fig. 1 muestra los gráficos de caja para los parámetros estimados $\hat{\sigma}^2$ y \hat{H} sobre 100 realizaciones de PCBM con $\sigma = 0,3$ (Fig. 1.a) y fBm con $H = 0,3$ (Fig. 1.b), para todas las longitudes de señal consideradas en este artículo. En ambos casos puede notarse que la dispersión de las estimaciones se hace menor a medida que aumenta la longitud de la señal, y que los valores medios de las estimaciones proveen resultados más cercanos al valor verdadero del parámetro correspondiente (es decir, disminuye el sesgo). Se obtienen resultados similares al utilizar distintos valores en los parámetros σ^2 y H . Esto provee evidencia de que la calidad de las estimaciones aumenta drásticamente cuando aumenta el número de muestras.

Esta mejora en la estimación puede ser explicada si se analiza la influencia que tiene el número de muestras en el MFA. Dado que en la DWT se realiza una decimación durante la descomposición, la longitud de la señal determina la cantidad de escalas que pueden ser obtenidas. A su vez, esto juega un rol crucial en el análisis dado que limita el rango de escalas sobre el cual se realizan las regresiones lineales de las funciones de estructura para obtener los exponentes de escalamiento (Sec. 2.4). Por lo tanto, mientras menor sea el número de escalas disponibles más estrecho será el intervalo de regresión y, en consecuencia, el ajuste será más impreciso.

También debe ser tenido en cuenta el hecho de que el MFF basado en WL requiere del conocimiento de los

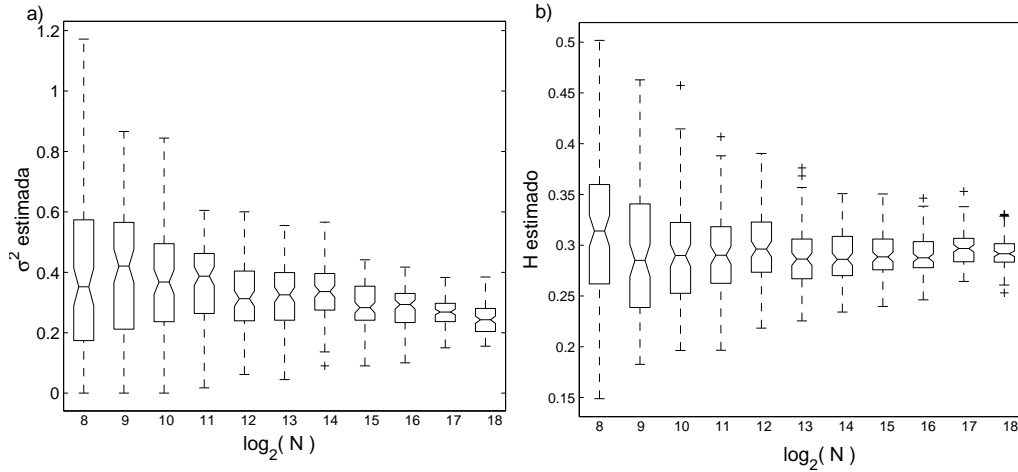


Figura 1: Gráficos de cajas para la estimación del parámetro correspondiente a cada modelo sobre 100 realizaciones de PCBM con $\sigma^2 = 0,3$ (a) y fBm con $H = 0,3$ (b), para longitudes de señal $N = 2^8, 2^9, \dots, 2^{18}$. El parámetro estimado es σ^2 en (a) y H en (b).

coeficientes ondita en un rango mayor de escalas que el MFF basado directamente en dichos coeficientes [1]. De hecho, la Ec. (1) establece que el cálculo de los $L_f(j, k)$ requiere del análisis de los coeficientes ondita sobre todas las escalas más finas $2^{j'} < 2^j$. En la práctica esto quiere decir que los $L_f(j, k)$ correspondientes a las primeras escalas son imprecisos [1] debido a que no hay una cantidad suficiente de escalas más finas que permitan un cálculo correcto. Esta falta de precisión de los $L_f(j, k)$ en las escalas más finas limita aún más el rango de escalas disponible para la regresión.

Como se mencionó en la introducción, al aplicar el MFA por ventanas debería utilizarse una ventana lo más corta posible para lograr una buena resolución temporal. Sin embargo, como mostraron estos experimentos, al disminuir la longitud de la ventana aumenta drásticamente la imprecisión de las estimaciones. Para ilustrar las implicaciones de esta relación de compromiso entre precisión y resolución, se aplicó el MFA por ventanas a una señal formada por la concatenación de dos segmentos s_1 y s_2 de fBm con exponente de Hurst $H_1 = 0,3$ y $H_2 = 0,7$, respectivamente. Esta señal puede observarse en la Fig. 2.a. La longitud de cada segmento fue de 2^{13} muestras. Se utilizaron dos longitudes de ventana: $L = 2^8$ y $L = 2^{12}$ muestras, y un desplazamiento de la ventana de 2^7 muestras. En cada ventana se calculó el índice multifractal c_1 , definido en la Sec. 2.4. Los valores obtenidos en cada ventana fueron asignados a su punto medio.

Dado que la señal descrita consiste en una concatenación de monofractales, la evolución temporal de c_1 debería consistir idealmente en una función constante por trozos, con valores $c_1 = H_1$ y $c_1 = H_2$ en la primera y segunda mitad, respectivamente. La Fig. 2 muestra las evoluciones obtenidas al utilizar una ventana de 2^8 (Fig. 2.b) y 2^{11} (Fig. 2.c) muestras. Co-

mo se puede observar, a diferencia de las evoluciones suaves que se obtienen al usar la ventana más larga, el uso de una ventana pequeña provoca una mayor irregularidad. Sin embargo, en ambos casos las *medias instantáneas* de las evoluciones se mantienen cercanas a sus valores teóricos. Sin embargo, la ganancia en precisión es opacada por una importante pérdida de resolución. Esto puede apreciarse en la Fig. 2.c, donde la transición de un segmento de fBm al otro (que ocurre en $n = 2^{13} = 8192$) es detectado alrededor de $n = 7000$, es decir, con un error de aproximadamente media longitud de ventana.

Para estudiar las implicaciones de este fenómeno en el análisis de señales biomédicas, se aplicó el MFA por ventanas a señales de HRV de pacientes que sufren de isquemia de miocardio. El estudio de índices multifractales tales como c_1 y c_2 permiten la detección de episodios isquémicos, como sugerimos en [10]. Por lo tanto, se obtuvo la evolución temporal de c_1 usando ventanas de 2^8 y 2^{11} muestras (128 s y 512 s, respectivamente) y un desplazamiento de la ventana de 128 muestras (32 s). Ventanas mayores que 2^{11} muestras no son útiles en esta aplicación dado que serían más largas que la mayoría de los episodios isquémicos observados en nuestra base de datos y, por lo tanto, conllevarían una resolución inaceptable.

La Fig. 3.a muestra una señal de HRV con un episodio isquémico que va desde 1890 s a 2130 s aproximadamente. Las evoluciones de c_1 usando las ventanas corta y larga se muestran en Fig. 3.b y Fig. 3.c, respectivamente. Nuevamente, se puede ver que la primera muestra una evolución más irregular que la segunda. De hecho, si estos índices fueran a utilizarse en un sistema de detección de episodios isquémicos basado en umbrales, la evolución de la Fig. 3.b ciertamente causaría un mayor número de detecciones erróneas debido

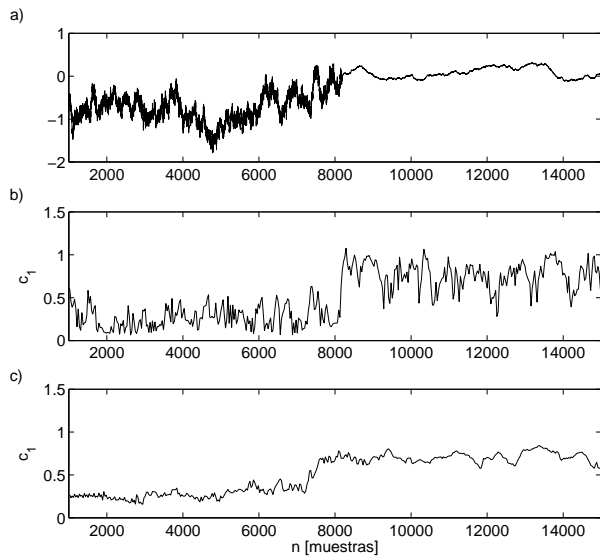


Figura 2: Señal artificial formada por la concatenación de dos segmentos de fBm (a) y evolución temporal del índice multifractal c_1 usando una longitud de ventana de 2^8 muestras (b) y 2^{18} muestras (c).

a sus significativas fluctuaciones. Sin embargo, las evoluciones de la Fig. 3.c harían que el inicio del episodio isquémico se detecte antes del momento en que verdaderamente ocurre.

En [10] se exploró el problema de la clasificación entre zonas normales e isquémicas. Con este fin, se definieron tres zonas de interés en cada señal: la zona isquémica (IZ), centrada en el episodio isquémico, y las zonas normales anterior (ANZ) y posterior (PNZ), ubicadas antes y después de la IZ, respectivamente. En cada una de las zonas se calcularon los índices c_1 y c_2 , y se usaron los valores obtenidos en la ANZ como referencia, es decir, se calcularon las diferencias de los índices en la IZ y PNZ con la ANZ. Para mayores detalles, referirse a [10]. En este trabajo se realizó el mismo experimento, pero variando la longitud de la ventana. La Fig. 4 muestra los incrementos de c_1 contra los de c_2 usando ventanas de 2^8 muestras (Fig. 4.a) y 2^{11} muestras (Fig. 4.b). En la última se puede ver una buena separación entre las clases, sugiriendo la posibilidad de distinguir entre el estado patológico y el normal mediante un clasificador lineal. Por el contrario, al usar la ventana más corta las clases aparecen mezcladas, imposibilitando su clasificación.

Es pertinente remarcar que en algunas aplicaciones, como el análisis de tráfico en redes, donde el número de muestras es típicamente alto, es posible usar ventanas largas manteniendo una resolución temporal aceptable. Por en contrario, en aplicaciones como el análisis de señales de HRV (u otras señales biomédicas) donde la cantidad de muestras es habitualmente pequeña, el uso de ventanas largas conlleva una resolución tempo-

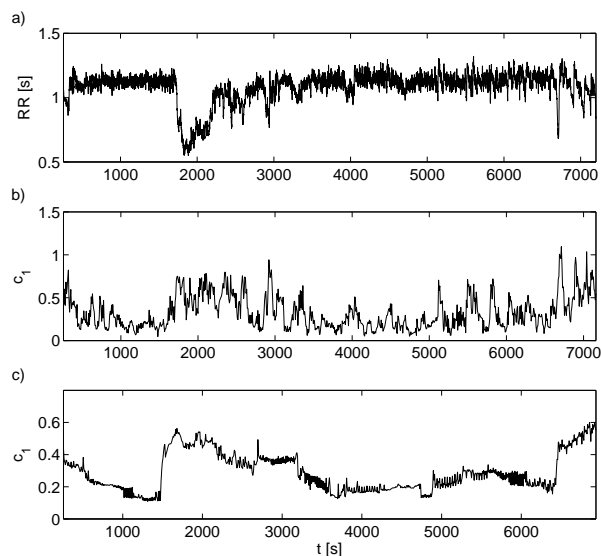


Figura 3: Señal de HRV con un episodio isquémico (a) y evolución temporal del índice multifractal c_1 usando una longitud de ventana de 2^8 muestras (b) y 2^{11} muestras (c).

ral inaceptable.

4. CONCLUSIONES

En este artículo fueron discutidos algunos de los problemas que surgen al aplicar el análisis multifractal basado en onditas líderes en ventanas temporales deslizantes. Nuestros experimentos muestran claramente la dependencia de la varianza de las estimaciones con el número de muestras disponible. Este hecho tiene importantes implicaciones prácticas y es raramente discutido en la literatura. En algunas aplicaciones, los datos sobre los que se trabaja inherentemente tienen una cantidad pequeña de muestras y se requiere la aplicación del MFA por ventanas para obtener información sobre los cambios en la regularidad de las señales. Hemos mostrado, mediante el uso de señales sintéticas con propiedades conocidas, que en tales situaciones hay una relación de compromiso entre la precisión en la estimación y la resolución temporal. La longitud de la ventana debería ser seleccionada cuidadosamente teniendo en cuenta que se puede usar una ventana lo más corta posible mientras la varianza de las estimaciones se mantenga lo suficientemente pequeña como para permitir detectar los cambios en regularidad bajo estudio. Hemos ilustrado esta situación mediante el uso de señales de HRV. En este caso, hemos mostrado que el uso de ventanas demasiado cortas puede hacer que el fenómeno bajo estudio se vuelva indetectable debido a la gran varianza de las estimaciones. A modo de comentario final, las conclusiones que se extraen al aplicar este método deberían ser hechas con mucho cuidado, dado que la búsqueda de una buena resolución puede conducir a una imprecisión severa en los

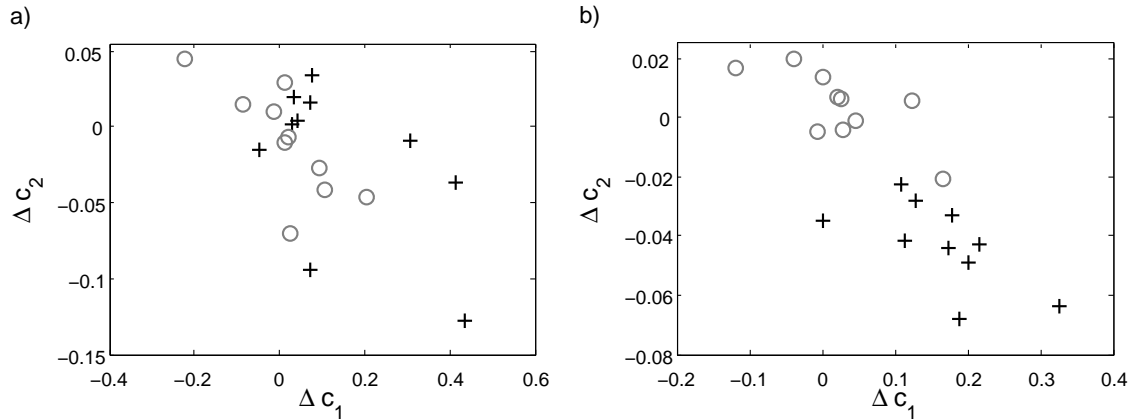


Figura 4: Incrementos de los *índices multifractales* en la zona isquémica (cruces negras) y en la zona normal (círculos grises) usando usando una longitud de ventana de 2^8 muestras (a) y 2^{11} muestras (b).

parámetros obtenidos.

Referencias

- [1] P. Abry, S. Jaffard, and B. Lashermes. Revisiting scaling, multifractal, and multiplicative cascades with the wavelet leader lens. In *Proc. SPIE*, volume 5607, pages 103–117, 2004.
- [2] P. Abry and D. Veitch. Wavelet analysis of long-range-dependent traffic. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44(1):2–15, 1998.
- [3] A. Arneodo, E. Bacry, and J. F. Muzy. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A*, 213(1):232–275, 1995.
- [4] J. Barral and B.B. Mandelbrot. Multifractal products of cylindrical pulses. *Probability Theory and Related Fields*, 124(3):409–430, 2002.
- [5] Sergio Cerutti, Anna M. Bianchi, and Lucca T. Mainardi. *Heart Rate Variability*, chapter Spectral Analysis of the Heart Rate Variability Signal, pages 63–74. Futura Publishing Co., 1995.
- [6] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. On non-scale-invariant infinitely divisible cascades. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(3):1063–1083, 2005.
- [7] A.L. Goldberger, L.A.N. Amaral, J.M. Hausdorff, P.C. Ivanov, C.K. Peng, and H.E. Stanley. Fractal dynamics in physiology: alterations with disease and aging, 2002.
- [8] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. *Fractal Geometry and Applications: Multifractals, probability and statistical mechanics, applications*, 72:91, 2004.
- [9] B. Lashermes, S. Jaffard, and P. Abry. Wavelet leader based multifractal analysis. In *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '05)*, volume 4, pages iv/161–iv/164, March 18–23, 2005.
- [10] R.F. Leonarduzzi, G. Schlotthauer, and M.E. Torres. Wavelet leader based multifractal analysis of heart rate variability during myocardial ischaemia. In *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2010 Annual International Conference of the IEEE*, pages 110–113, 2010.
- [11] Stéphane Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 2nd edition, 1999.
- [12] J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Physical review E*, 47(2):875–884, 1993.
- [13] G. Parisi. On the singularity structure of fully developed turbulence, appendix to fully developed turbulence and intermittency by U. Frisch. In *Proc. Int. Summer school Phys. Enrico Fermi, North Holland*, 1985.
- [14] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard. Bootstrap for empirical multifractal analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4):38–48, 2007.
- [15] Herwig Wendt and Patrice Abry. Multifractality tests using bootstrapped wavelet leaders. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(10):4811–4820, 2007.