

Descomposición empírica en modos por conjuntos completa con ruido adaptativo y aplicaciones biomédicas

Marcelo A. Colominas ^{*}, Gastón Schlotthauer ^{*}, Patrick Flandrin [‡],
María E. Torres ^{* §}

^{*} Laboratorio de Señales y Dinámicas no Lineales, Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina

[‡] Laboratoire de Physique (UMR CNRS 5672), École Normale Supérieure de Lyon, Francia

E-mail: [§] metorres@santafe-conicet.gov.ar

Resumen. La Descomposición Empírica en Modos (*Empirical Mode Decomposition, EMD*) es un método guiado por los datos que permite expresar una señal como una suma de componentes AM-FM. Cada una de estas componentes, llamadas funciones de modo intrínsecas o modos, representa procesos físicos subyacentes en la señal. Sin embargo, en ciertos casos ocurre un fenómeno no deseado conocido como «mezcla de modos», frecuentemente presente en ciertas señales biomédicas. Para atenuar este problema, se propuso una variante conocida como Descomposición Empírica en Modos por Conjuntos (*Ensemble EMD, EEMD*), consistente en realizar la descomposición sobre un conjunto cuyos elementos son la suma de la señal más realizaciones de ruido blanco gaussiano. Esta descomposición atenúa el problema de la mezcla de modos de la EMD. Sin embargo introduce nuevas dificultades que serán discutidas en este trabajo. Aquí se amplía la descripción de un nuevo algoritmo basado en la EEMD, propuesto por los autores, con el objetivo de resolver estos problemas. A tal fin, en cada etapa de la descomposición, se agrega un tipo de ruido diferente. La descomposición resultante, a diferencia de la que proporciona la EEMD, es completa, es decir que permite la reconstrucción exacta de la señal original. Se ilustran los alcances de este nuevo método, analizando tres ejemplos: una función delta de Dirac discreta, un electrocardiograma y una señal de voz. Los resultados muestran que el nuevo método permite eludir satisfactoriamente los problemas de la EEMD, proveyendo una mejor separación espectral de los modos con un menor costo computacional.

1. Introducción

La Descomposición Empírica en Modos (*Empirical Mode Decomposition, EMD*) [1] es un método adaptativo para el análisis de señales no lineales y no estacionarias. Produce una separación local y completamente guiada por los datos, en oscilaciones rápidas y lentas. No obstante, la EMD presenta algunos problemas, tales como la presencia de oscilaciones de amplitud muy dispar en uno o más modos, o de oscilaciones muy similares en diferentes modos, fenómeno conocido como «mezcla de modos». Para disminuir este problema, en [2] se propuso un nuevo método: la Descomposición Empírica en Modos por Conjuntos (*Ensemble Empirical Mode Decomposition, EEMD*), la cual realiza una EMD sobre cierta cantidad de realizaciones (habitualmente algunos cientos) de ruido blanco gaussiano sumadas a la señal de interés. La adición de ruido blanco gaussiano reduce el problema de la mezcla de modos al poblar por

completo el espacio tiempo-frecuencia, aprovechando el comportamiento como banco de filtros diádico de la EMD [3]. Sin embargo crea nuevas dificultades. De hecho, como consecuencia de la aplicación del algoritmo, la señal reconstruida como suma de los modos contiene ruido no presente en la original. Además, diferentes realizaciones de señal más ruido blanco pueden producir distinto número de modos.

En este trabajo se describe una variación del algoritmo de EEMD, introducido por los autores en [4], con el objetivo de reducir los inconvenientes mencionados y se ilustra su potencialidad para el análisis de señales biomédicas. Este nuevo método, frente a la EEMD, ofrece ventajas adicionales tales como una reconstrucción exacta de la señal, una mejor separación espectral de los modos y un menor costo computacional.

En la sección 2 se introducen los conceptos principales de la EEMD, se presenta el nuevo método y se describen los datos simulados y reales usados. En la sección 3 se discuten los resultados obtenidos con el método aquí propuesto y se comparan con los correspondientes a la aplicación de la EEMD. Por último, se presentan las conclusiones en la sección 4.

2. Materiales y Métodos

En esta sección se describe brevemente el método de EEMD, y se detallan el nuevo algoritmo de descomposición empírica en modos y las señales con las que se estudió su desempeño.

2.1. Descomposición Empírica en Modos por Conjuntos

La EMD [1] descompone una señal en un número habitualmente pequeño de Funciones de Modo Intrínsecas (*Intrinsic Mode Functions, IMFs*) o, simplemente, modos. Para ser considerada una IMF, una señal debe satisfacer dos condiciones: (i) la cantidad de puntos extremos (máximos y mínimos) y la cantidad de cruces por cero deben ser iguales o diferir a lo sumo en uno; y (ii) la media local, definida como el valor medio de las envolventes superior e inferior, debe ser nula para todo punto.

La EEMD define a los modos «verdaderos» (aquí simbolizados como \overline{IMF}) como el promedio de las correspondientes IMFs obtenidas con EMD sobre un conjunto de señales generadas al sumar diferentes realizaciones de ruido blanco de varianza finita a la señal original (señal de interés) $x[n]$. El algoritmo de EEMD puede describirse de la siguiente manera:

1. generar $x^{(i)}[n] = x[n] + w^{(i)}[n]$, donde $w^{(i)}[n]$ ($i = 1, \dots, I$) es una realización de ruido blanco gaussiano,
2. descomponer completamente cada $x^{(i)}[n]$ ($i = 1, \dots, I$) mediante EMD, obteniendo sus modos $IMF_k^{(i)}[n]$, donde $k = 1, \dots, K$ indica el modo, de la siguiente manera
 - I. inicializar los índices $k = 1, j = 1$, y hacer $r_1^{(i)}[n] = x^{(i)}[n]$,
 - II. encontrar todos los puntos extremos de $r_k^{(i,j)}[n]$,
 - III. interpolar entre los mínimos (máximos), para obtener la envolvente $e_{min}^{(i,j)}[n]$ ($e_{max}^{(i,j)}[n]$),
 - IV. calcular la media local $m_k^{(i,j)}[n] = (e_{min}^{(i,j)}[n] + e_{max}^{(i,j)}[n]) / 2$,
 - v. extraer la j -ésima candidata a IMF $d_k^{(i,j)}[n] = r_k^{(i,j)}[n] - m_k^{(i,j)}[n]$,
 - VI. verificar si $d_k^{(i,j)}[n]$ es una IMF:
 - si lo es, hacer $r_k^{(i,j+1)}[n] = d_k^{(i,j)}[n]$, $j = j + 1$, e ir al paso II,
 - si no lo es, hacer $IMF_k^{(i)}[n] = d_k^{(i,j)}[n]$, $k = k + 1$, $j = 1$ y calcular el residuo $r_k^{(i)}[n] = x^{(i)}[n] - \sum_{l=1}^{k-1} IMF_l^{(i)}[n]$,
 - VII. continuar con el proceso hasta alcanzar un criterio de detención predefinido.
3. asignar \overline{IMF}_k como el k -ésimo modo de $x[n]$, obtenido al promediar los correspondientes $IMF_k^{(i)}$: $\overline{IMF}_k[n] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I IMF_k^{(i)}[n]$.

La extracción de cada $IMF_k^{(i)}$ se realiza mediante un proceso que requiere $j = 1, \dots, J_k^{(i)}$ iteraciones, denominado *sifting*.

2.2. EEMD completa con ruido adaptativo

Nótese que en la EEMD, cada $x^{(i)}[n]$ se descompone independientemente de las otras realizaciones y para cada una de ellas se obtiene un residuo $r_k^{(i)}[n] = r_{k-1}^{(i)}[n] - IMF_k^{(i)}[n]$.

A continuación, describiremos el método de CEEMDAN (*Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise*) recientemente presentado en [4]. En lo que sigue, los modos obtenidos con él se indicarán como \widetilde{IMF}_k .

La idea general del CEEMDAN es la siguiente: dado $x[n]$ se generan las $x^{(i)}[n]$ y se calcula el primer modo $\widetilde{IMF}_1[n] = \overline{IMF}_1[n]$ como en EEMD. A continuación se calcula un único primer residuo, independiente de la realización de ruido:

$$r_1[n] = x[n] - \widetilde{IMF}_1[n]. \quad (1)$$

Luego, sobre un conjunto de $r_1[n]$ más diferentes realizaciones de un ruido particular, se calcula para cada una de ellas el primer modo mediante EMD. Se define \widetilde{IMF}_2 como el promedio de estos primeros modos. El próximo residuo está dado por: $r_2[n] = r_1[n] - \widetilde{IMF}_2[n]$. Este procedimiento se repite hasta que se alcanza un criterio de detención.

El siguiente algoritmo detalla el método CEEMDAN aquí propuesto. Definamos el operador $E_j(\cdot)$ que produce el j -ésimo modo obtenido mediante EMD. Sea $w^{(i)}$ una realización de ruido blanco con media cero y varianza unitaria. Entonces:

1. para cada $i : 1, \dots, I$ descomponer cada realización $x[n] + \varepsilon_0 w^{(i)}[n]$ mediante EMD, hasta obtener el primer modo y calcular

$$\widetilde{IMF}_1[n] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I IMF_1^{(i)}[n] = \overline{IMF}_1[n].$$

2. en la primera etapa ($k = 1$) calcular el primer residuo como en la ecuación (1): $r_1[n] = x[n] - \widetilde{IMF}_1[n]$.
3. descomponer $r_1[n] + \varepsilon_1 E_1(w^{(i)}[n])$, $i = 1, \dots, I$, con EMD hasta obtener el primer modo y definir el segundo modo de CEEMDAN como:

$$\widetilde{IMF}_2[n] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E_1(r_1[n] + \varepsilon_1 E_1(w^{(i)}[n])).$$

4. para $k = 2, \dots, K$ calcular el k -ésimo residuo:

$$r_k[n] = r_{(k-1)}[n] - \widetilde{IMF}_k[n]. \quad (2)$$

5. descomponer $r_k[n] + \varepsilon_k E_k(w^{(i)}[n])$, $i = 1, \dots, I$, con EMD hasta obtener el primer modo y definir el $(k + 1)$ -ésimo modo de CEEMDAN como:

$$\widetilde{IMF}_{(k+1)}[n] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E_1(r_k[n] + \varepsilon_k E_k(w^{(i)}[n])). \quad (3)$$

6. ir al paso 4 para el próximo k .

Iterar los pasos 4 a 6 hasta que el residuo obtenido no admita descomposición con EMD.

Observar que, por construcción de CEEMDAN, el residuo final satisface:

$$R[n] = x[n] - \sum_{k=1}^K \widetilde{IMF}_k, \quad (4)$$

siendo K el número total de modos. Por lo tanto, la señal de interés $x[n]$ puede ser expresada como

$$x[n] = \sum_{k=1}^K \widetilde{IMF}_k + R[n], \quad (5)$$

y esto garantiza que la descomposición propuesta es completa y proporciona una reconstrucción exacta de los datos originales.

Puede apreciarse que en el caso del método aquí propuesto, los coeficientes ε_i permiten seleccionar la SNR en cada etapa. Usamos aquí unos pocos cientos de realizaciones (500) y la misma SNR para todas las etapas. En todas las implementaciones utilizamos la *toolbox* de EMD disponible en: <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>.

2.3. Datos

En el presente trabajo se analizan señales artificiales y reales. Teniendo en cuenta que en [5] se usó una delta de Dirac $\delta[n]$ para mostrar que el ruido puede ayudar al análisis de datos en aquellos casos en que la EMD no puede aplicarse, dando origen a la EEMD en [2], aquí consideramos una $\delta[n]$ de 512 muestras a efectos comparativos. Como segundo ejemplo estudiamos señales de Electrocardiograma (ECG) de la MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database [6]. Finalmente analizamos una señal de voz de la base de datos [7].

3. Resultados

Como primer ejemplo, aplicamos el método propuesto a una señal $\delta[n]$. En la figura 1(a) se presenta la descomposición obtenida mediante EEMD y en 1(b) el resultado de la aplicación del nuevo método CEEMDAN. En ambos casos, se usaron $I = 500$ realizaciones, con $\varepsilon_0 = 0,02$, correspondiente a una SNR de 34 dB. El eje de las abscisas corresponde al índice de muestras de la señal. En el panel izquierdo, puede verse que la EEMD produce trece modos, mientras que con el método propuesto en este trabajo se obtienen sólo nueve modos, como se observa en la figura 1(b).

En ambas descomposiciones los modos uno a cinco poseen amplitudes similares ($0,01 \leq |\overline{IMF}_k| \leq 0,5$ para $k = 1, \dots, 5$) y menores a 10^{-3} para $k = 6, 7, 8$, con menor energía en el caso de la EEMD. Los modos nueve a trece de la EEMD tienen muy baja amplitud ($\max(|\overline{IMF}_k|) \leq 2 \times 10^{-4}$). Puede observarse que en la descomposición por EEMD los modos con $k \geq 8$ no son simétricos, como podría esperarse de la señal y de los primeros modos. La baja energía de los modos superiores ($k \geq 9$) en el caso de la EEMD se debe al efecto de la promediación, habiéndose observado una gran variación en el número de modos producidos en cada realización. La tabla 1 muestra cuántas realizaciones $x^{(i)}[n]$ produjeron un cierto número de modos. Para $\delta[n]$ sólo una realización produjo siete modos, 17 realizaciones produjeron ocho modos, y así sucesivamente. En comparación, para una señal dada, el método aquí propuesto produce un único número de modos debido a que (i) cada realización de señal más ruido se descompone hasta que se alcanza el primer modo, y (ii) para el último modo K usamos como criterio de detención el mismo usado en EMD [1]. Puede observarse también en la figura 1(a) que en \overline{IMF}_4 el máximo central es menor que los máximos laterales y que \overline{IMF}_k ($5 \leq k \leq 7$) no presentan máximos centrales.

Por otro lado, la descomposición con el nuevo método, a la derecha en la figura 1, tiene un comportamiento similar para todos los modos, semejante a lo que se obtiene realizando un análisis *wavelet*. Flandrin y col. [5] obtuvieron resultados similares al calcular una respuesta equivalente al impulso de la EMD sumando ruido a una función delta de 256 muestras, usando 5.000 realizaciones y promediando las IMFs correspondientes. En nuestro caso alcanzamos resultados similares utilizando un décimo de las realizaciones.

Otra ventaja del método aquí propuesto, respecto de la EEMD, es relativa al número iteraciones de *sifting* requeridas en el ejemplo analizado. Mientras la EEMD necesitó 278.931

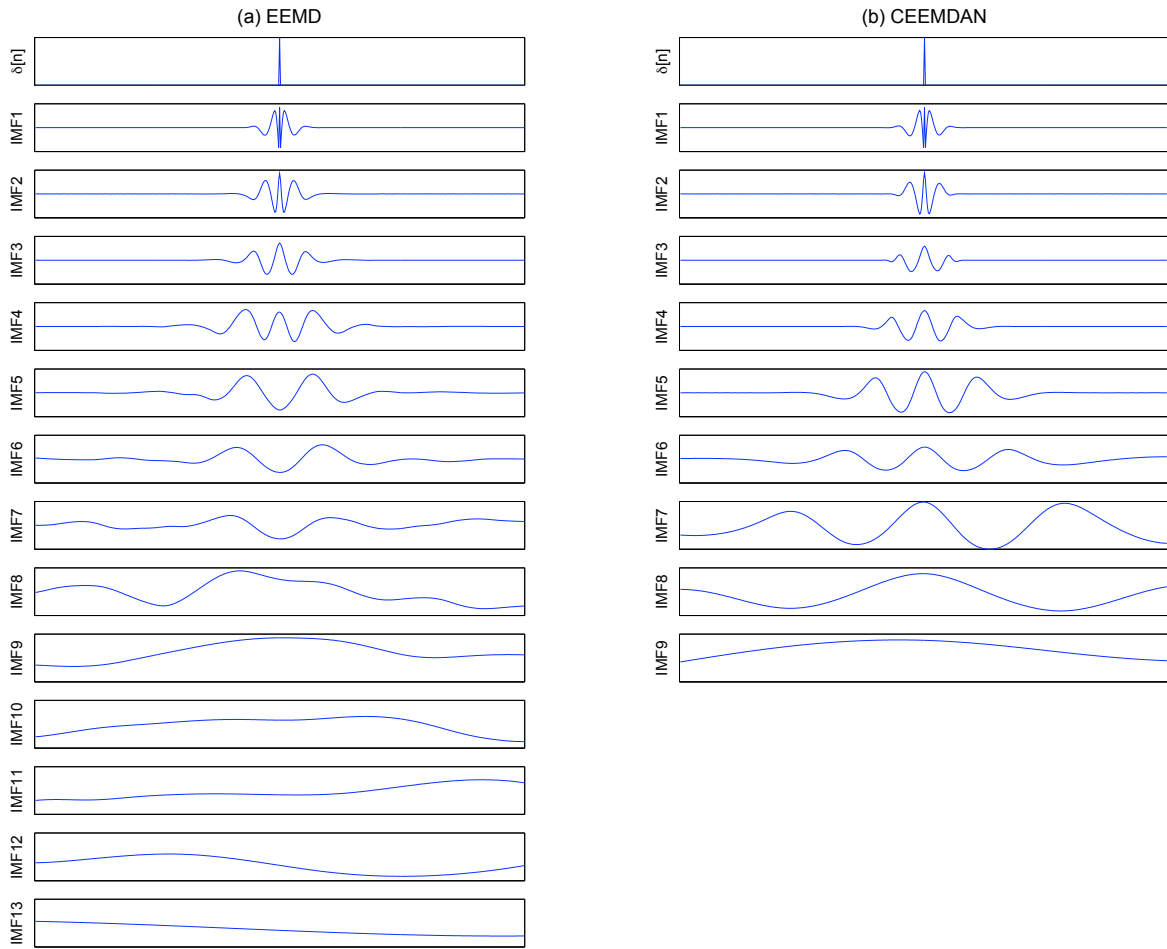


Figura 1. Descomposición de $\delta[n]$: (a) EEMD (\overline{IMF}); (b) CEEMDAN (\widetilde{IMF}), con desvío estándar del ruido agregado $\varepsilon = 0,02$ y $I = 500$ realizaciones. El eje de las abscisas corresponde al índice de muestras de la señal.

Tabla 1. Cantidad de modos producidos para cada realización i al descomponerlas mediante EEMD.

#	7	8	9	10	11	12	13	I
$\delta[n]$	1	17	175	234	66	6	1	500
ECG	11	130	262	94	3	-	-	500

iteraciones de *sifting* en total, el método CEEMDAN requirió sólo 140.939 iteraciones.

Para comparar las propiedades de separación espectral, se muestran en la figura 2 las densidades espectrales de potencia de los modos tres a siete de ambas descomposiciones. A la derecha puede observarse que los espectros obtenidos mediante CEEMDAN están menos solapados que aquellos producidos por EEMD, evidenciando una separación más clara del contenido frecuencial entre los modos.

Diferentes autores han propuesto usar EMD o EEMD para limpiar de ruido las señales de ECG [8, 9]. Dichas señales se caracterizan por poseer eventos «tipo espiga» (complejos QRS), similares

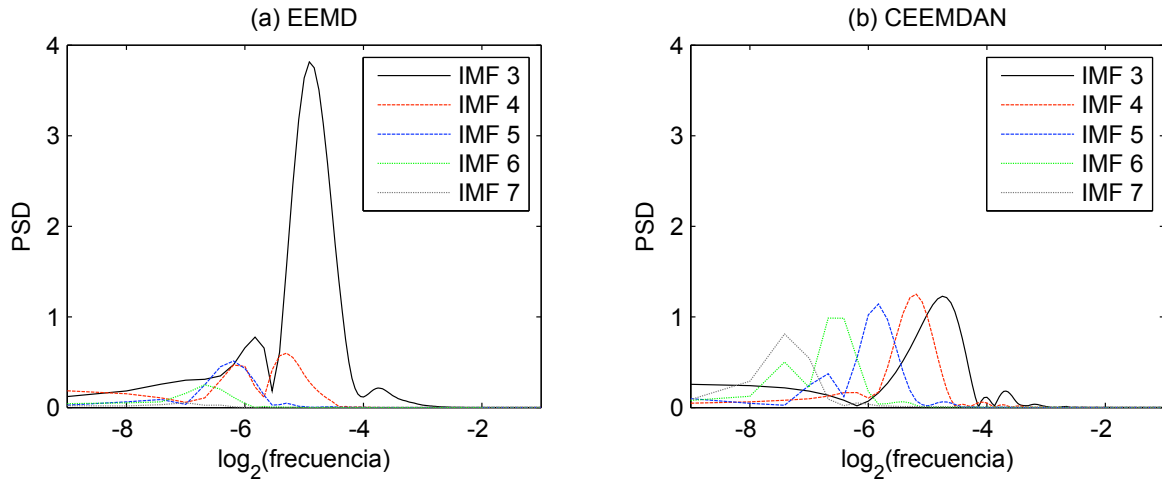


Figura 2. Espectros de los modos 3 a 7 obtenidos mediante: (a) EEMD (\overline{IMF}); (b) CEEMDAN (IMF).

a las funciones δ de Dirac discretas analizadas previamente. En experimentos preliminares con señales de ECG, se observó una severa mezcla de modos al descomponerlas mediante EMD. Aunque la EEMD alivia este problema, consume demasiado tiempo debido a la gran cantidad de iteraciones de *sifting* necesarias para lograr la descomposición. En la figura 3 se presentan ambas descomposiciones de una señal de ECG, obtenidas mediante EEMD (izquierda) y con CEEMDAN (derecha). En ambos casos se usaron 500 realizaciones con $\varepsilon = 0,2$ para el ruido agregado (SNR = 14 dB). Puede apreciarse en el panel derecho que la frecuencia fundamental (F) resulta claramente capturada en el séptimo modo por CEEMDAN, mientras que en el caso de la EEMD, F aparece con menor energía en los modos seis y siete (panel izquierdo). Debido a eso, un algoritmo de extracción de frecuencia fundamental basado en EEMD, como el presentado en [10], podría fallar al intentar identificar el modo que la contiene. Además puede verse que \overline{IMF}_6 no es una IMF, dado que no cumple con su definición, pues existen máximos negativos y mínimos positivos. Se observa también una baja energía para \overline{IMF}_{10} e \overline{IMF}_{11} , similar a lo observado en los modos altos de la descomposición mediante EEMD de $\delta[n]$.

Un aspecto importante a analizar es la cantidad de iteraciones requeridas por los métodos aquí utilizados. Los gráficos de cajas de las iteraciones de *sifting* necesarias para cada descomposición de la señal de ECG se presentan en la figura 4. Pueden observarse las diferencias de escala entre ambos ejes verticales (1.500 vs. 400). Mientras que en el caso de la EEMD (figura 4(a)) el número total de iteraciones fue de 187.023, para nuestro método (figura 4(b)) fue de 79.317. Es claro que el nuevo método CEEMDAN proporciona una mejora en términos de costo computacional respecto de EEMD, reduciendo en este ejemplo a un 42,4% el número de iteraciones de *sifting*, considerando los mismos criterios de detención.

La completitud del nuevo método está garantizada por la ecuación (5). Para confirmar numéricamente esta propiedad, presentamos en la figura 5 el error de reconstrucción para ambas descomposiciones, calculado como la diferencia entre la señal de ECG y la suma de los modos. En el caso de CEEMDAN, la máxima amplitud es menor a 2×10^{-15} (cercano al error de redondeo de la computadora) con una desviación estándar de 2×10^{-14} . Para alcanzar esta precisión con la EEMD (la cual no garantiza una descomposición completa) sería necesario incrementar el número de realizaciones por encima de 10^{28} , considerando que en EEMD el ruido restante tiene una desviación estándar de $\varepsilon_r = \varepsilon/\sqrt{I}$, tornando al proceso extremadamente costoso en términos

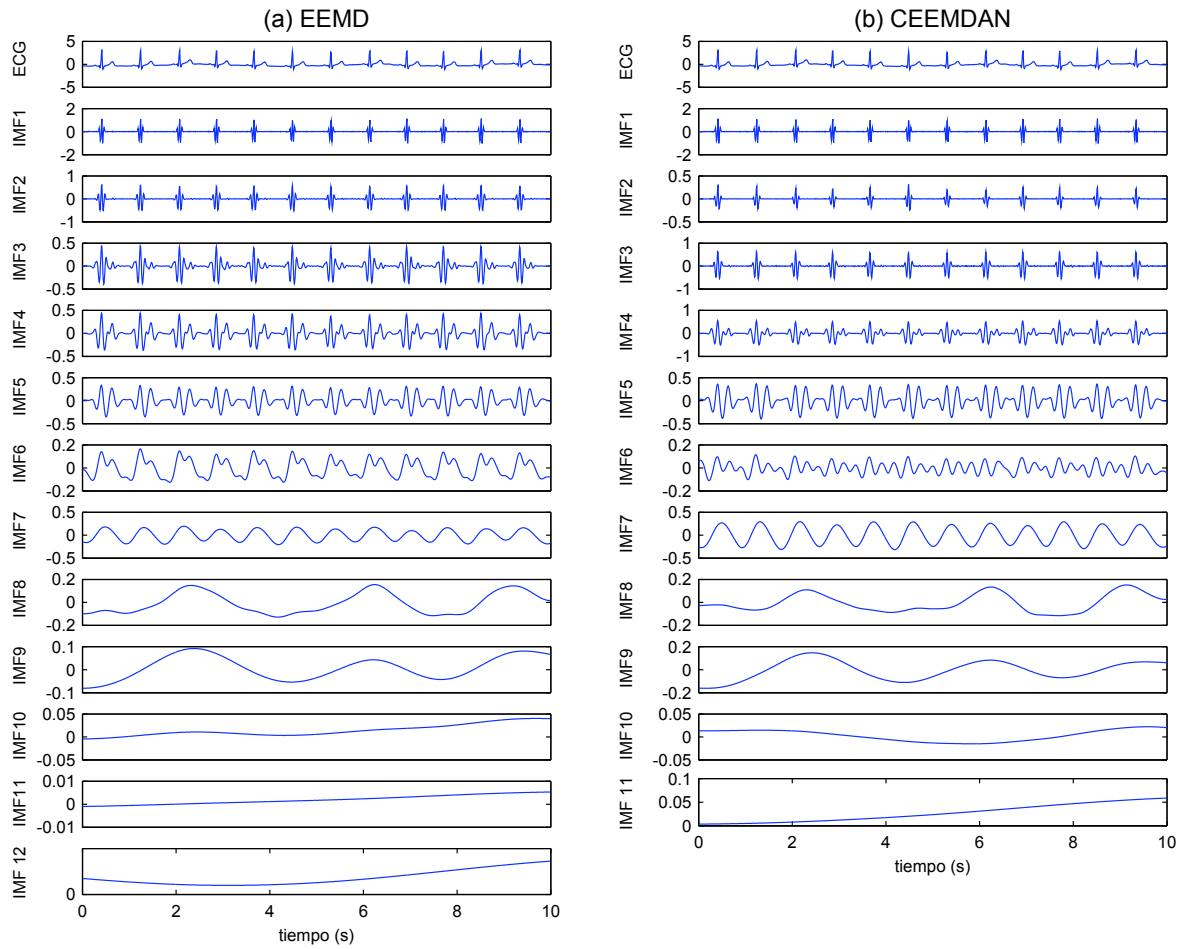


Figura 3. Descomposición de una señal de ECG de 10 segundos de duración mediante: (a) EEMD (\widehat{IMF}); (b) CEEMDAN (\widehat{IMF}). Desvío estándar del ruido agregado $\varepsilon = 0,2$. Cantidad de realizaciones $I = 500$.

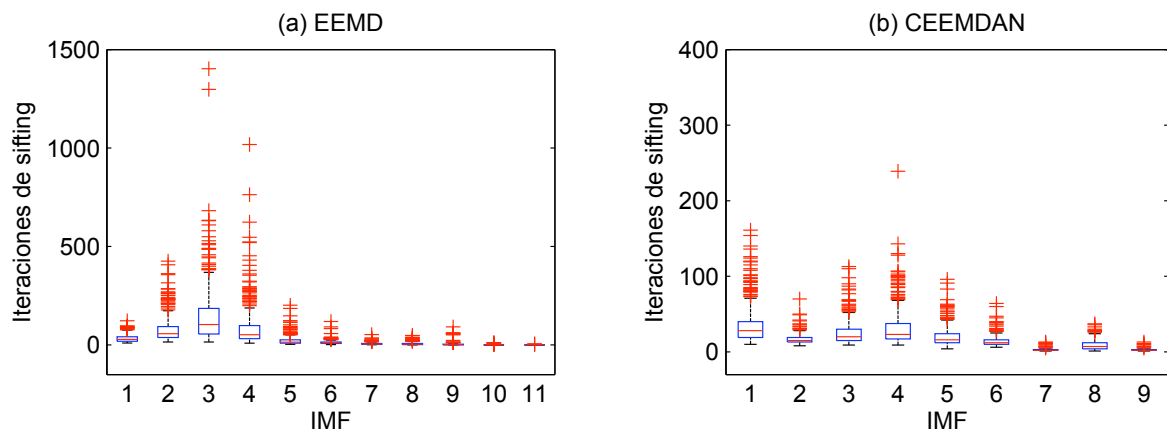


Figura 4. Gráficos de cajas de las iteraciones de *sifting* para cada modo. (a) EEMD; (b) CEEMDAN. Nótese las diferentes escalas en el eje de las ordenadas.

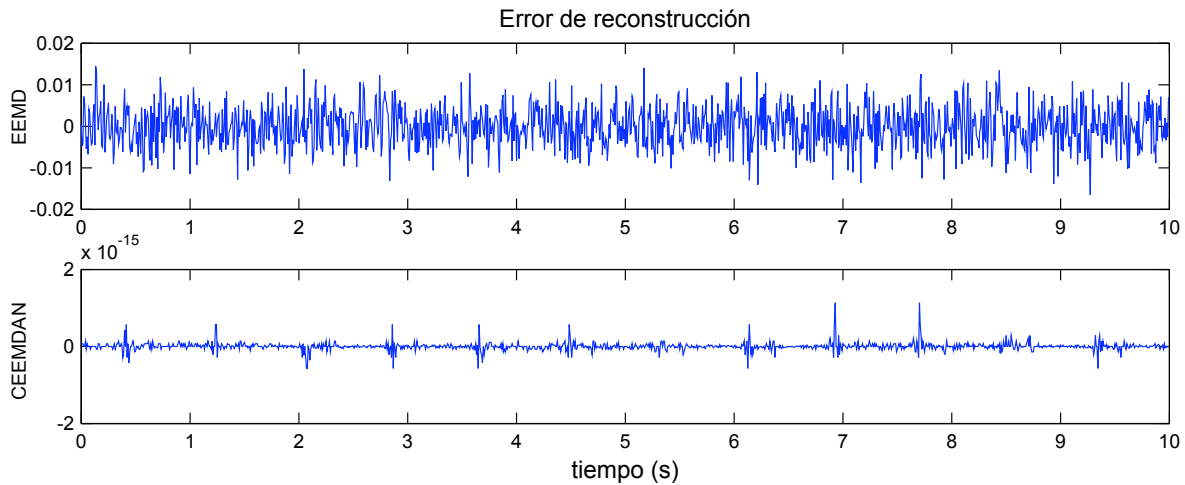


Figura 5. Error de reconstrucción para: (a) EEMD; (b) CEEMDAN.

computacionales.

En [10] Schlottauer y col. ilustraron la mezcla de modos presente en las descomposiciones por EMD de señales de vocal /a/ y propusieron un nuevo algoritmo de extracción de frecuencia fundamental (F_0) basado en la EEMD. Sin embargo en algunas señales de voz la EEMD puede presentar un comportamiento defectuoso. En la figura 6 se presentan las descomposiciones de una señal de vocal /a/ sostenida, obtenidas mediante EEMD (a) y con CEEMDAN (b). En ambos casos se usaron 500 realizaciones con $\varepsilon = 0,2$ para el ruido agregado (SNR = 14 dB). Puede verse que mientras \widetilde{IMF}_8 captura claramente F_0 , \widetilde{IMF}_7 presenta un aumento gradual en la amplitud no presente a esa escala en la señal original. Además \widetilde{IMF}_6 presenta una severa mezcla de modos mientras que se evidencia una clara separación espectral entre \widetilde{IMF}_k para $4 \leq k \leq 8$.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos descripto pormenorizadamente un nuevo algoritmo para el análisis y procesamiento de señales no lineales y no estacionarias denominado CEEMDAN. El nuevo método fue probado exitosamente tanto con señales artificiales como reales, prestando especial atención a las señales biomédicas.

El CEEMDAN no solamente supera los inconvenientes de EMD y de EEMD, sino que además posee las ventajas de requerir menos de la mitad de las iteraciones de *sifting* que la EEMD y de ser completo, por cuanto la señal original puede ser reconstruida exactamente sumando los modos obtenidos. En el caso de señales tipo delta, el método propuesto otorga una mejor descomposición que la EEMD en términos de análisis frecuencial. La propiedad teórica de completitud de la descomposición fue confirmada numéricamente en el caso de la señal de ECG. Debido a eso, no es necesaria una cantidad elevada de realizaciones (estrategia usada en EEMD para reducir el nivel de ruido remanente) resultando en un ahorro computacional significativo. CEEMDAN recupera algunas de las propiedades de la EMD perdidas por la EEMD, tales como la completitud y una cantidad de modos sólo determinada por los datos y los criterios de detención.

En el caso de señales biomédicas, se evidencia un mejor desempeño del nuevo método, constituyéndose en una nueva herramienta para su análisis.

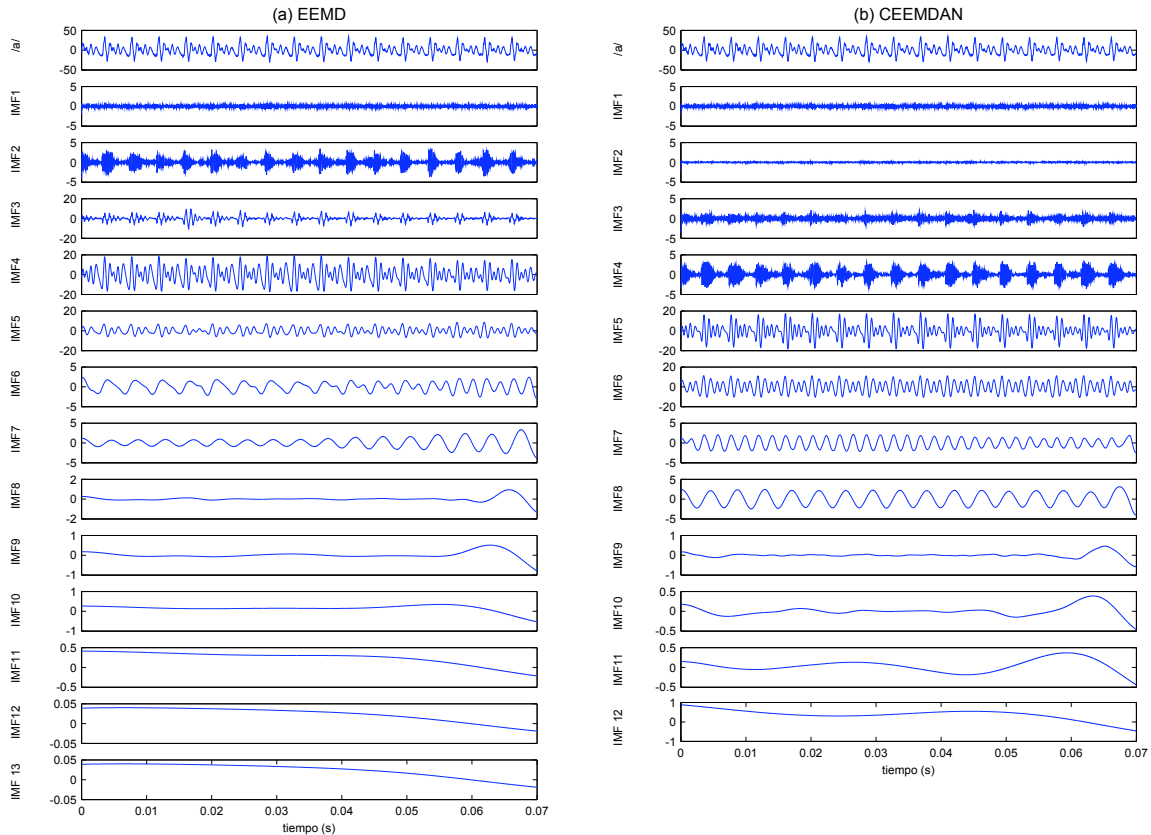


Figura 6. Descomposición de una señal de vocal /a/ sostenida mediante: (a) EEMD (\widetilde{IMF}); (b) CEEMDAN (\widetilde{IMF}). Desvío estándar del ruido agregado $\varepsilon = 0, 2$. Cantidad de realizaciones $I = 500$.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el auspicio de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT), el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), y la Universidad Nacional de Entre Ríos (UNER).

Referencias

- [1] Huang N, Shen Z, Long S, Wu M, Shih H, Zheng Q, Yen N, Tung C and Liu H 1998 The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis *Proc. R. Soc. Lond. A* **454** 903–95
- [2] Wu Z and Huang N 2009 Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method *Advances in Adaptive Data Analysis* **1** 1–41
- [3] Flandrin P, Rilling G and Gonçalves P 2004 Empirical mode decomposition as a filter bank *IEEE Signal Processing Letters* **11** 112–4
- [4] Torres M E, Colominas M A, Schlotthauer G and Flandrin P 2011 A Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition with Adaptive Noise *Proc. 36th Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP (May 22-27, Prague, Czech Republic)* (en prensa)
- [5] Flandrin P, Gonçalves P and Rilling G 2005 EMD Equivalent Filter Banks, from Interpretation to Applications in *Hilbert-Huang Transform and Its Applications* ed N E Huang and S S Shen (World Scientific) chapter 3 pp 57–74
- [6] MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database <http://www.physionet.org/cgi-bin/ATM>. Accedido: 29/04/2011.
- [7] Kay Elemetrics Corp., “Disorder Voice Database ver 1.03,” Massachusetts Eye and Ear Infirmary, Voice and Speech Lab, Boston, 1994.

- [8] Weng B, Blanco-Velasco M and Earner K 2006 ECG Denoising Based on the Empirical Mode Decomposition *Proc. 28th IEEE EMBS Ann. Int. Conf. (Aug 30-Sept 3, New York)* pp 1–4
- [9] Chang K 2010 Ensemble empirical mode decomposition for high frequency ECG noise reduction *Biomedizinische Technik/Biomedical Engineering* **55** 193–201
- [10] Schlotthauer G, Torres M E and Rufiner H 2009 A new algorithm for instantaneous F_0 speech extraction based on Ensemble Empirical Mode Decomposition *Proc. 17th European Signal Processing Conf. (Aug. 24-28 Glasgow, Scotland, UK)* pp 2347–51